МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

ДОНБАСЬКА ДЕРЖАВНА МАШИНОБУДІВНА АКАДЕМІЯ

КОНСПЕКТ ЛЕКЦІЙ

з дисципліни

«Наукові основи оптимального проектування прогресивних конструкцій металургійного обладнання»

ЗАВДАННЯ ОПТИМІЗАЦІЇ ТЕХНОЛОГІЧНИХ ПРОЦЕСІВ

1.1. ЗАВДАННЯ ОПТИМІЗАЦІЇ У ТЕХНІЧНОМУ ПРОЕКТУВАННІ

Процес проектування технічних систем (пристроїв і процесів) є об'єктом вивчення в теорії технічних систем і за своєю природою є інформаційним (процес обробки даних на відміну від процесу обробки матеріалів). Це складний багаторівневий та багатоетапний процес прийняття численних рішень, спрямованих на досягнення кінцевої та проміжної мети. Особливістю цього процесу є його альтернативність (вибір одного з кількох можливих напрямів) та оборотність (можливість повернутися до одного з попередніх етапів проектування). Нині проектування виконують, застосовуючи евристичні методи технічного творчості, комп'ютерні технології, чи комбінований метод. Досі залишається проблемним питання повної автоматизації технічного (зокрема технологічного) проектування, однак у кожній технічній дисципліні склалися та використовуються відповідні підходи та типові методики, що дозволяють приймати рішення на різних етапах проектування. Оптимізація є одним із інструментів прийняття технічного рішення, доцільність якого випливає із вимоги забезпечити максимальне або мінімальне значення критерію (умови) оптимізації (цільової функції).

Відомо, що в навколишньому світі, у тому числі у світі техніки та технології, немає нічого не оптимального. Це твердження також істинно, як і тому, що будь-яке штучне (на відміну природного) дію без доцільного управління цією дією (менеджменту) безглуздо. У живій природі безглузді дії (і складені з цих процесів неоптимальні процеси) призводять до зникнення (виродження) носіїв цих процесів. У техніці та технології всяка відмінність від оптимальності конструкції та процесів призводить до зниження їх ефективності, тобто до нерентабельності відповідних виробничих та (або) технологічних процесів.

Нерентабельні виробничі одиниці (приватні підприємства, фірми, корпорації тощо) в умовах обмежених природних та енергетичних ресурсів, з одного боку, та потужною конкуренцією виробників товарів, з іншого боку, приречені на банкрутство. Отже, проблеми оптимізації технічних систем (конструкцій і процесів) належать до актуальних у техніці та технології.

Пошук оптимальних технічних (у тому числі технологічних) рішень є завданням технічного (технологічного) проектування, тобто можливий тільки при використанні відповідних методів технічної творчості. Однак у існуючій технічній літературі завдання оптимізації технічних систем, зазвичай, мають спеціальний характері і відповідають специфіці технічної дисципліни. У той же час відсутні сучасні літературні джерела, що викладають теорію та практику оптимізації на системній основі та показують наступність підходів, область доцільного їх використання та приклади пошуку оптимальних технічних рішень.

Теоретичні основи проектування та прикладна теорія оптимізації почали активно формуватись у 60-х роках минулого століття при розробці кількісних методів прийняття рішень. Одним із ефективних засобів кількісного обґрунтування оптимальних рішень при проектуванні було в ті роки дослідження операцій (розділ кібернетики), яке сформувалося як самостійний напрямок у період Другої світової війни для вирішення військово-технічних та тактичних завдань. Характерні риси цього розділу кібернетики:

1. Дослідження операцій призначене для відшукання оптимальних рішень у різних галузях людської діяльності - промисловості, військової техніки, військовому мистецтві, торгівлі і т.д.

2. Дослідження операцій дає кількісну основу прийняття рішень й у сенсі полегшує прийняття рішень.

3. Дослідження операцій не дає рішення. Для прийняття рішення необхідно ще залучити досвід та здоровий глузд, оскільки доводиться враховувати фактори, які важко оцінити кількісно.

4. Під час дослідження операцій для оптимізації рішень використовуються різні кількісні критерії ефективності.

5. Під час дослідження операцій широко використовують математичні методи – теорію ймовірності, математичну статистику, теорію масового обслуговування, теорію ігор, математичні методи оптимізації (математичне програмування), методи статистичних випробувань тощо.

Аналіз існуючої літератури з теорії оптимізації та теорії оптимальних процесів показує, що найчастіше об'єкти оптимізації мають економічний, а не технологічний характер. Це викликано тим, що економічні об'єкти (на відміну від технологічних) безпосередньо характеризуються двома узагальненими показниками: прибуток та витрати. Причому будь-яке зростання прибутку пов'язане зі зростанням витрат і настає такий момент, коли подальша зміна регулюючої величини (параметра оптимізації) у бік збільшення прибутку призводить до її зменшення. Точка, в якій відбувається зміна тенденції зростання прибутку, є екстремальною та характеризує оптимальне значення регулюючої величини. У технології машинобудування регулюючих величин дуже багато, а кількість альтернативних рішень, що виникають у ході проектування, підпорядковується закону, близькому до геометричної прогресії (показано нижче). Тому шлях до зазначених узагальнених показників виявляється дуже довгим (рішення приймаються різних рівнях ієрархії системи проектування). Проміжними етапами цього шляху є досягнуті технологічні показники (результати щодо досягнутої точності, якості поверхневого шару, продуктивності обробки тощо), які найчастіше є самодостатніми для технолога. У зв'язку з цим завдання технологічної оптимізації є актуальним у технології машинобудування, оскільки дозволяє підготувати вихідні дані для економічної оптимізації.

Досі проблемним є питання застосування математичного апарату як інструмент структурної та параметричної оптимізації. Це питання пов'язане з поняттям відносності оптимального рішення. Справа в тому, що дуже часто оптимум (як певне відносне рішення) шукається інтуїтивно, виходячи насамперед з обмеженого часу на сам пошук (пошук - це процедура, яка вимагає часу). Будь-який отриманий при цьому результат перевіряється практикою (яка може бути багаторічною і навіть віковою). При цьому будь-яке проміжне рішення (отримане на даний момент часу і апробоване практикою) як можливе вже є оптимум, бо на цей час відкинуто (як нераціональні) багато інших альтернатив. Отже, приходимо до висновку, що оптимальне рішення завжди є відносно, оскільки область його дії визначена конкретною ситуацією.

Історія розвитку різних за природою технічних систем дозволяє простежити процес їхньої структурної оптимізації. При цьому оцінними функціями досягнутої якості є параметри, показники та технічні характеристики цих систем у техніці та технології. Причому сама оцінка – це теж процес, який займає певний час. Для технічно складних систем, заснованих на високих технологіях їх проектування, виготовлення та експлуатації цей час є суттєвим. Наприклад, відомий сьогодні (як стандарт) формат поширення звукових файлів MP3 (загальноприйняте скорочення формату MPEG Audio Layer III) створювався з 1977 року в Німеччині і лише 1999 року Американська незалежна компанія грамзапису Sub Pop випустила перший музичний запис у форматі MP3, тобто. вперше з'явилася можливість програвати музичні файли на комп'ютері. Тут слід зазначити, що зазначений 22-річний період створення формату MP3 здійснювався без математичної моделі об'єкта, а скоріше методом спроб та помилок. При цьому кожне нове технічне рішення зіставлялося з попереднім у ході вирішення проблеми стиснення інформації без її втрати.

1.1.2. ОПТИМІЗАЦІЯ, ЯК МЕТОД УПРАВЛІННЯ ПРОЕКТУВАННЯМ

Будь-яка технічна система (конструкція або процес) має свій життєвий цикл, що включає етапи проектування, виготовлення та експлуатації. Цей цикл (як і цикл обробки деталі на верстаті, наприклад, робочий цикл шліфування) повинен бути оптимальним. Вибір оптимальних структури та параметрів технічної системи є процес прийняття відповідних рішень, який протікає в часі та підпорядковується певним правилам теорії оптимізації. Будь-яке рішення щодо наступного етапу приймається лише по тому, як прийнято рішення з попередньому етапі, тобто. є порівняння досягнутого проміжного рішення з необхідним критеріям теорії оптимізації. У цьому параметри системи та її структура хіба що підганяються з вимог забезпечити контрольовані критерії і є наслідком, які з цих критеріїв. У цьому параметри системи є регулюючими величинами, рахунок яких забезпечуються регульовані величини, які входять у критерії оптимізації. Тому процес оптимізації є одночасно процесом управління проектуванням технічної системи.

1.1.3. ОПТИМІЗАЦІЯ, ЯК МЕТОД СИНТЕЗУ ТЕХНІЧНИХ СИСТЕМ

Питання аналізу та синтезу в теорії технічних систем належать до найбільш важливих і розглядаються у відповідних розділах цієї дисципліни. Аналіз дозволяє підготувати вихідні дані для синтезу при проектуванні, оптимізація на етапі синтезу – конкретизує ці дані, виходячи з умови оптимуму цільової функції. У цьому сенсі оптимізація є методом синтезу структури та параметрів. Системоутворююча функція оптимізації проявляється при виборі структури та параметрів конструкцій та робочих процесів, причому найбільший ефект дає структурна оптимізація, оскільки (на відміну від параметричної оптимізації) пов'язана зі зміною якості об'єкта оптимізації. Розглянемо простий приклад, який пояснює це твердження. Довгий час (починаючи з 70-х років минулого століття) система додаткового повітряного охолодження двигуна автомобілів «Жигулі» була виконана за жорсткою схемою примусового охолодження: механічний ременний привід вентилятора від колінчастого валу двигуна. Тобто. частота обертання вентилятора однозначно визначалася частотою обертання цього валу. В результаті, в зимовий період при запуску холодного двигуна примусове охолодження посилювало ситуацію: холодний двигун важко запустити, а вентилятор забирає додаткову енергію і додатково охолоджує і без того переохолоджений двигун. Як наслідок – підвищена витрата палива під час прогрівання двигуна. З іншого боку, у літній період, у спеку і, особливо, під час руху автомобіля з малою швидкістю (у транспортній пробці) спостерігається така ситуація, коли двигун перегрівається. Інтенсивність примусового повітряного охолодження вкрай недостатня, так як мала частота обертання колінчастого валу. Збільшити частоту обертання вентилятора неможливо. Як наслідок – перегрів двигуна та необхідність вимушеної зупинки автомобіля (для охолодження двигуна). У цьому можливості параметричної оптимізації (форма та геометричні розміри вентилятора) вичерпані, тобто. оптимальні параметри вичерпали свої (у разі обмежені) можливості. Вихід з «параметричного глухого кута» - зміна структури системи охолодження: усунення жорсткого зв'язку осей вентилятора і колінчастого валу. Тепер (непов'язаний з колінчастим валом) електричний привід вентилятора керується лише термодатчиком, вбудованим у систему рідинного охолодження двигуна. При необхідності охолодження частота обертання вентилятора висока і залежить від швидкості руху автомобіля (літній період). З іншого боку (в зимовий період) вентилятор взагалі вимкнено і не заважає запуску холодного двигуна. Як наслідок, у новій конструкції зменшена витрата палива та підвищена надійність транспортного засобу. А попередньо проведена параметрична оптимізація числа (4 або 8), форми та розмірів лопатей вентилятора виявляє себе в цій ситуації найкращим чином (якщо потрібно охолоджувати, то охолодження ефективне, а якщо не потрібно – охолодження відсутнє). Тут слід зазначити, що розглянута система повітряного охолодження радіатора двигуна не є основною, а додатковою до системи охолодження рідини. Колись ще більш ранні часи (на початку минулого століття) автомобілі мали виключно повітряне охолодження, яке в ході структурної оптимізації конструкції охолоджуючої системи було практично повністю витіснене рідинним охолодженням. Водночас, система повітряного охолодження була залишена як додатковий засіб до рідинного охолодження.

Інший приклад структурної оптимізації (як методу синтезу) - зміна підсистеми подачі палива в систему живлення двигуна (карбюратор). Після бензонасоса формують два паралельні потоки палива: один (як і раніше) - в карбюратор, інший - (через жиклер) назад в паливний бак. У літню пору (в спеку) підкапотний простір двигуна істотно нагрівається, що викликає часткове перетворення рідких фракцій палива в газоподібний стан. Без каналу зворотного стоку газоподібне паливо примусово рухається (наприклад, через карбюратор) двигун і викликає перебої в його роботі. Наявність другого каналу (з меншим опором) призводить до відгалуження газоподібної суміші. Тепер вона не потрапляє до карбюратора. Вибираючи шлях меншого опору, газоподібна суміш рухається у паливний бак. У свою чергу збільшення потоку палива через насос призводить до його додаткового охолодження, яке зменшує кількість газоподібного продукту в суміші (цей газоподібний продукт погано прокачується клапанами насоса).

Розглянуті приклади показують як з допомогою зміни структури технічної системи (у разі конструкції) домагаються поліпшення показників її: підвищують надійність техніки, зменшують експлуатаційні витрати тощо. Усе це зрештою – результат оптимального управління робочим (технологічним) процесом за умов впливу збурень на технологічну систему. Іншими словами, оптимізація як метод синтезу одночасно виявляє себе як метод керування.

Підсумовуючи загальний підсумок за процедурою структурної оптимізації, відзначимо, що вона характеризується переходом певних кількісних змін у якісні, коли кількісні зміни вичерпують свої можливості і потрібно змінити технічне рішення у принципі (на рівні ідеї). Отже, структурна та параметрична оптимізація тісно пов'язані між собою: коли можливості параметричної оптимізації вичерпані, приймається кардинальне рішення (свого роду «прорив»). Після реалізації чергового кардинального рішення нової структури системи оптимізуються параметри цієї системи. Процедура пошуку параметрів часто провадиться на математичних моделях об'єкта. Таким чином, найчастіша область використання математичного моделювання при оптимізації технічних систем – пошук оптимальних параметрів цих систем за відомої їхньої структури. Вочевидь цей висновок виключає математичного моделювання структур складних систем та його структурну оптимізацію по моделям.

1.1.4. МАТЕМАТИЧНІ МОДЕЛІ ТА ЇХ ЕЛЕМЕНТИ

Математична модель є формальним описом основних закономірностей досліджуваної системи (технічного устрою, технологічного процесу і т. д.) у вигляді математичних рівнянь і нерівностей, що дозволяє судити про поведінку системи, що вивчається, в натурних умовах.

Розв'язання кожної задачі при математичному моделюванні поділяється на два самостійні етапи. На першому етапі проводиться побудова математичної моделі системи, що вивчається. Другий етап включає дослідження моделі та отримання необхідної інформації. Зазвичай цей етап зводиться до вирішення математичної задачі та встановлення за заданих умов таких значень змінних у моделі величин, які найкраще задовольняли б поставленої мети дослідження.

Математичне моделювання досліджуваних у машинобудуванні систем можна поділити на два основні напрямки. Математичне моделювання систем на основі принципу оптимізації, що передбачає можливість та необхідність цілеспрямованого регулювання. У цьому випадку математичні моделі оптимізації є інструментом для вирішення завдань щодо визначення оптимальних рішень із застосуванням методів математичного програмування (диференціального та варіаційного обчислення, лінійного, нелінійного, динамічного програмування та інших методів програмування). Математичне моделювання систем на основі принципу імітації, що дозволяє виявити закономірності динаміки функціонування, вплив кожного окремого фактора, щоб, зрештою, встановити недоліки, переваги, резерви та шляхи підвищення ефективності, а потім на цій основі скоригувати прогноз розвитку систем, що вивчаються. Широке застосування математичних моделей імітації у машинобудуванні пояснюється можливістю моделювання ймовірнісних (стохастичних) складних процесів. У цьому випадку модель включає випадкові змінні, а побудова моделей імітації здійснюється з використанням імовірнісно-статистичних методів.

За структурою математичні моделі оптимізації включають такі елементи. Змінні - величини, оптимальні значення яких необхідно знайти у процесі розв'язання задачі. Параметри - постійні величини, які у процесі рішення залишаються незмінними й у моделі, зазвичай, представлені коефіцієнтами при змінних чи вільними членами у рівняннях і нерівностях.

1.1.5. ЦІЛЬОВА ФУНКЦІЯ ТА ОБМЕЖЕННЯ

Загальна теорія екстремальних завдань вивчає проблему відшукання екстремуму (максимуму чи мінімуму) функціоналів у різних функціональних просторах. Сутність екстремальної задачі полягає у визначенні екстремуму функції f (x), визначеної на множині M n - мірного простору $E_n((x = x_1, x_2, ..., x_n), n \geq 1)$. Екстремальні завдання бувають двох видів: завдання максимізації та мінімізації. У першому випадку потрібно знайти максимум (локальний або глобальний) функції f (x) на множині M. У другому – знайти мінімум (локальний чи глобальний) тієї самої функції тому ж безлічі. Зв'язок між мінімумом і максимумом однієї й тієї функції визначається умовою: мінімум функції f (x) дорівнює максимуму h(x) =- f (x), помноженому на коефіцієнт (-1). Функція f (x) називається цільовою функцією екстремальної задачі.

Множина М зазвичай задається за допомогою рівнянь і нерівностей наступного типу

$$g_i(\overline{x}) = 0, \quad i = 1,2,...,k; \tag{1.1}$$

$$g_i(\overline{x}) \le 0, \quad i = k+1,....,l; \tag{1.2}$$

$$g_i(\overline{x}) \ge 0, \quad i = l+1,...,m. \tag{1.3}$$

$$g_i(\overline{x}) = g_i(x_1, x_2, ..., x_n). \tag{1.4}$$

Крім умов типу (1.1)-(1.4) можуть бути різного типу додаткові умови (вимоги). Наприклад, вимога, щоб змінні x1, ..., xn приймали лише цілі значення (завдання цілого математичного програмування).

Рівняння, нерівності та додаткові умови, що задають множину М, називаються обмеженнями екстремальної задачі. У різних класах екстремальних завдань можуть бути ті чи інші обмеження з наведених вище рівнянь і нерівностей (1.1) - (1.4). Теорія екстремальних завдань є частиною більш загального розділу математики – математичного програмування, яке є розділом кібернетики та включає такі види програмування, як, наприклад: лінійне, нелінійне, динамічне та геометричне. Свою назву математичне програмування отримало від лінійного програмування, що входить до нього, в якому слово "програмування" пояснюється тим, що набір змінних, що підлягають знаходженню, зазвичай визначає програму (план) роботи досліджуваного (найчастіше економічного) об'єкта.

1.1.6. ВИДИ ЕКСТРЕМУМУ ФУНКЦІЇ

Залежно від наявності та відсутності обмежень, що накладаються на змінні $(j = 1 \div n)$, а також від особливостей самої функції $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ розрізняють такі види екстремуму: безумовний глобальний максимум і мінімум (б. г. max і б. г. min), безумовний локальний максимум і мінімум (б. л. max і б. л. min), а також відповідні умовні характеристики (у г. max, у.г.min, у.г.max, у.г.min). Що стосується функції однієї змінної (n = 1) зазначені види екстремуму можна проілюструвати графічно (рис.1.1). Іноді у літературі замість термінів локальний та глобальний використовують терміни відносний та абсолютний. У завданнях математичного програмування екстремум (локальний і глобальний) функції (x_1 , x_2 ,..., xn) за наявності обмежень як нерівностей може досягатися межі безлічі, що задається системою нерівностей. Наприклад, цей випадок має місце на рис. 1.1.б,в (точка А при x = C_1 і точка В при x = C_2). Слід зазначити, що у завданнях лінійного програмування глобальний (абсолютний) екстремум завжди має місце межі допустимої множини.

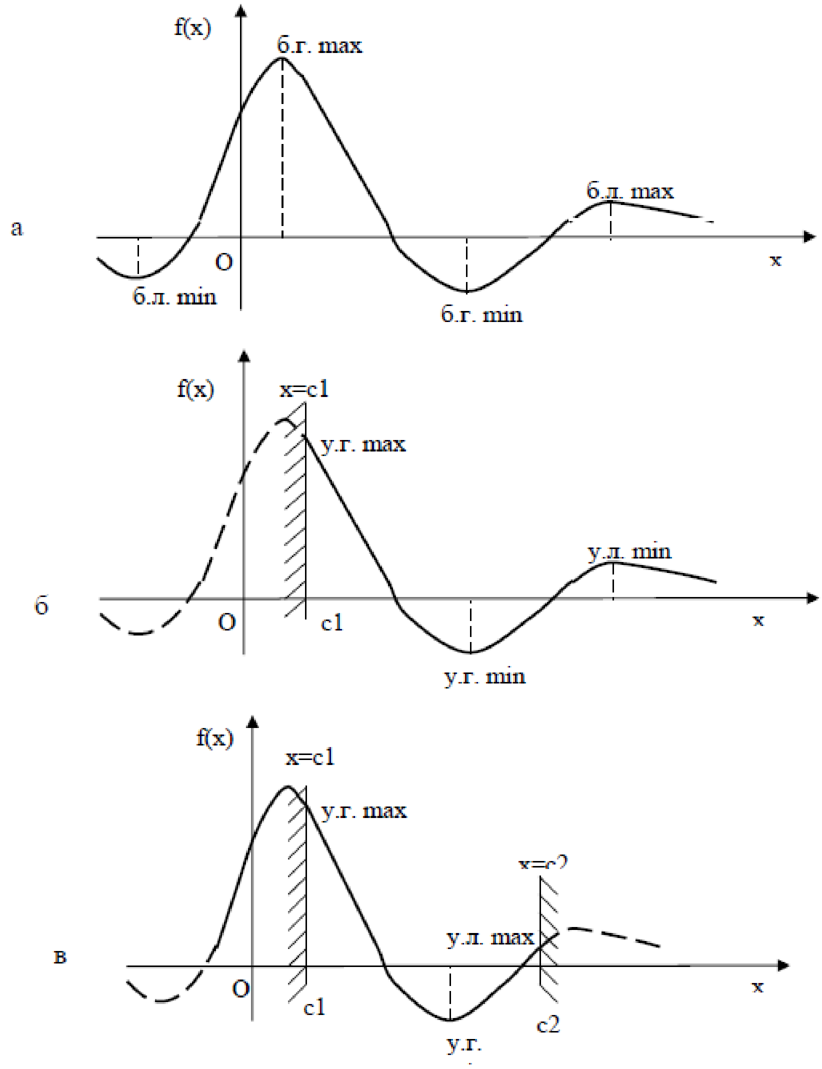


Рис. 1.1. Види екстремуму функції

1.2. КЛАСИФІКАЦІЯ ЗАВДАНЬ ОПТИМІЗАЦІЇ

Одна з основних цілей проектування полягає в оптимізації рішень, тобто в досягненні заданих характеристик при найменших витратах або найкращих характеристик систем, що проектуються, при обмежених витратах наявних ресурсів. Під ресурсами зазвичай розуміють час, матеріали, кошти тощо.

Сутність оптимізації зводиться до пошуку при накладених обмеженнях таких значень змінних x_1 , x_2 , ..., x_n , які дають мінімум (або максимум) цільової функції

$$Z = Z(x_1, x_2, ..., x_n). \tag{1.5}$$

Загальна задача оптимізації може бути сформульована у такому вигляді. Необхідно знайти значення змінних x_1, x_2, ..., x_n, при яких цільова функція Z набуває екстремального значення з урахуванням функціональних обмежень (рівностей)

$$\left.\begin{aligned} f_1 &= f_1(x_1, x_2, ..., x_n) = 0; \\ f_2 &= f_2(x_1, x_2, ..., x_n) = 0; \\ &\ldots\ldots\ldots \\ f_m &= f_m(x_1, x_2, ..., x_n) = 0; \end{aligned}\right\} \qquad (1.6)$$

та граничних умов (нерівностей)

$$\left.\begin{aligned} l_1 &= l_1(x_1, x_2, ..., x_n) \le L_1 \\ l_2 &= l_2(x_1, x_2, ..., x_n) \le L_2 \\ &\ldots\ldots\ldots \\ l_p &= l_p(x_1, x_2, ..., x_n) \le L_p \end{aligned}\right\}. \qquad (1.7)$$

Функціональні обмеження можуть бути пов'язані як з обмеженістю ресурсів, так і з вимогами, накладеними на змінні та їх залежність між собою (наприклад, такими вимогами при проектуванні є маса, габарити, характеристики надійності, параметри точності та якості, вартість тощо) . Прикладом граничних умов може бути умова невід'ємності змінних

$$x_i \ge 0, \quad i = 1, 2, ..., n. \qquad (1.8)$$

Число m функціональних обмежень не може бути більшим за кількість змінних (m ≤ n). Різниця m - n визначає число ступенів свободи в даній задачі, тільки m - n змінних беруться довільними, значення інших змінних визначаються з функціональних обмежень. У окремому випадку, коли m = n, число ступенів свободи дорівнює нулю, функціональні обмеження визначають значення всіх змінних. Тут оптимізація цільової функції Z не потрібно, оскільки є лише одна альтернатива, визначальна значення цієї функції.

Рішення, отримане в результаті оптимізації, називають програмою або планом. Як наслідок, математична оптимізація називається також математичним програмуванням, хоча останнє немає нічого спільного зі складанням програм для комп'ютера.

1.2.1. КЛАСИФІКАЦІЯ ЗА ЗАСТОСУВАННЯМИ МАТЕМАТИЧНИХ МЕТОДІВ

Математичні методи оптимізації можна класифікувати так, як показано на рис.1.2. Застосування аналітичних методів завжди краще чисельних, оскільки аналітичні методи дозволяють отримати досить повну і загальну картину досліджуваної функції, встановити вплив різних факторів на цю функцію. Аналітичні методи застосовні тоді, коли критерій, обмеження та зв'язки між координатами, рішеннями та аргументом, а також початкові та кінцеві умови представлені функціями. Ці функції повинні бути принаймні двічі диференційованими і мати кінцеву кількість точок розривів. Для використання класичних методів визначення екстремумів функцій та функціоналів – диференціального та варіаційного обчислення – обов'язково, крім того, відсутність обмежень. За наявності обмежувальних умов у формі рівностей визначається умовний екстремум, тобто вирішується завдання Лагранжа. І тут використовується метод невизначених множників Лагранжа.

Принцип максимуму Л. С. Понтрягіна застосуємо в умовах, коли є обмеження та рішення є функцією аргументів, але модель є набір аналітичних залежностей.

Використання чисельних методів передбачає знання області можливих змін рішення, і що ця область вже, т. е. що більше обмежень, то ефективніше застосування чисельних методів оптимізації. У разі, коли критерій є лінійною функцією рішення, а обмеження є набором лінійних нерівностей і процес однокроковий (одноетапний), подібне завдання вирішується методами лінійного програмування.

Якщо критерій та обмеження є нелінійними функціями вирішення та процес однокроковий, то подібне завдання вирішується методами нелінійного програмування. Геометричне програмування є математичним методом оптимізації, що дозволяє вирішувати завдання оптимізації у випадках, коли цільова функція та обмеження виражаються нелінійними функціями спеціального виду. Методи регулярного та випадкового пошуку застосовні для вирішення будь-якого завдання математичної оптимізації, проте дуже трудомісткі.

Методи регулярного пошуку екстремуму функцій однієї чи багатьох змінних за наявності обмежень передбачають чітко визначений порядок дій. Розрізняють пасивний пошук, у якому не враховуються результати попередніх кроків, і послідовний пошук, де ці результати враховуються. Методи регулярного пошуку добре розроблені лише для відшукання екстремуму унімодальних функції однієї змінної, тобто функцій, що мають єдиний екстремум на інтервалі допустимих значення аргументу. Універсальних методів відшукання світових екстремумів функції багатьох змінних немає. У цих випадках застосовують метод сканування (сліпого пошуку), покоординатного підйому (спуску), званого також методом Гаусса-Зайделя, градієнтний, найшвидшого підйому (спуску) та ін.

Метод випадкового пошуку використовується для відшукання екстремуму функції багатьох змінних за будь-яких обмежень. Сутність методу ось у чому. Спочатку знаходять будь-яке допустиме рішення, т. Е. Рішення, що задовольняє всім обмеженням, але не обов'язково доставляє екстремум функції. Потім випадковим чином (навгаду) змінюють якісь умови завдання і, знайшовши нове значення функції, визначають, чи воно ближче до екстремуму, ніж спочатку отримане або далі. Залежно від цього або повертаються у вихідну точку і звідти знову починають рух, або отриманої точки роблять новий випадковий крок. Метод випадкового пошуку дозволяє отримати вирішення багатьох завдань на комп'ютері швидше, ніж інші методи, проте не завжди гарантує досягнення позитивних результатів.

Оптимізація багатокрокових (багатоетапних) процесів здійснюється методом динамічного програмування. Формально цей метод можна застосувати для будь-яких випадків і обмежується лише можливостями комп'ютерів. Подібними властивостями має і дискретний принцип максимуму, що є поширенням принципу максимуму Л. С. Понтрягіна на дискретні процеси.

Евристичне програмування не є суворим і не гарантує досягнення абсолютного оптимуму. При складанні евристичних програм використовується досвід фахівців, який формалізується як правил, емпіричних залежностей і схем обчислень. Особливо перспективне евристичне програмування на вирішення завдань великої розмірності і передусім завдань інженерного проектування. Тут можливе безліч варіантів. Так, відповідно до роботи кількість різних поєднань лише основних вузлів керованого снаряда становить $3 \cdot 10^6$. Цифрою такого ж порядку може оцінюватись можлива кількість варіантів технологічних процесів. Однак досвідчений проектувальник (конструктор і технолог), як правило, не аналізує всі можливі варіанти і відразу відкидає більшість із них, звужуючи область дослідження. Цей прийом використовується і в евристичному програмуванні.

Розглянуті вище методи оптимізації відносяться до галузі детермінованих (невипадкових) функцій та процесів. Однак у практиці проектування доводиться вирішувати завдання та стохастичного програмування, тобто оптимізувати випадкові величини та функції. Зазвичай під час вирішення подібних завдань розглядають математичні очікування величин, що є суворим, чи залучають лінійне програмування на вирішення стохастичних завдань.

1.2.1.1. АНАЛІТИЧНІ МЕТОДИ ОПТИМІЗАЦІЇ

Як зазначалося, відшукання екстремальних значень методами диференціального обчислення можливе у разі, якщо цільова функція Z диференційована і навіть відсутні обмеження. Якщо функція Z є функцією одного змінного, слід знайти коріння рівняння

$$\frac{dZ(x)}{dx} = 0. \tag{1.9}$$

Якщо $d^2Z(x)/dx^2 > 0$, то має місце мінімум функції, при $d^2Z(x)/dx^2 < 0$ - максимум.

У разі функції двох змінних $Z(x_1, x_2)$ вирішується система рівнянь

$$\left.\begin{aligned} \frac{dZ(x_1, x_2)}{dx_1} = 0; \\ \frac{dZ(x_1, x_2)}{dx_2} = 0. \end{aligned}\right\} \tag{1.10}$$

Отримані рішення досліджуються підстановкою у вирazі $\partial^2 Z(x_1, x_2)/\partial x_1^2; \partial^2 Z(x_1, x_2)/\partial x_2^2; \partial^2 Z(x_1, x_2)/\partial x_1 \partial x_2$ та обчисленням виразу

$$\Delta = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial^2 Z(x_1, x_2)}{\partial x_1^2} & \dfrac{\partial^2 Z(x_1, x_2)}{\partial x_1 \partial x_2} \\ \dfrac{\partial^2 Z(x_1, x_2)}{\partial x_1 \partial x_2} & \dfrac{\partial^2 Z(x_1, x_2)}{\partial x_2^2} \end{vmatrix}. \tag{1.11}$$

Якщо $\Delta > 0$ і $\partial^2 Z \quad (x_1, x_2) / \partial x_1^2 < 0$, то має місце максимум; якщо $\Delta > 0$ і $\partial^2 Z(x_1, x_2) / \partial x_1^2 > 0$ - мінімум; якщо $\Delta < 0$, то немає ні максимуму, ні мінімуму. Якщо Z є функцією багатьох змінних $x_1, x_2, ..., x_n$, то необхідно вирішити систему n рівнянь

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial Z(x_1, x_2, ..., x_n)}{\partial x_1} = 0; \\ \frac{\partial Z(x_1, x_2, ..., x_n)}{\partial x_n} = 0. \end{aligned}\right\}. \qquad (1.12)$$

Здається, тут все дуже просто. Однак ця простота оманлива. Для складного багатокрокового процесу цей спосіб стає надзвичайно громіздким. Частіше «намацати» екстремум перебором, ніж вирішити систему рівнянь. Крім того, при цьому підході не завжди можна знайти гарантоване рішення, оскільки звернення похідної в нуль не забезпечує максимуму (мінімуму), а потребує додаткової перевірки. До того ж, цей спосіб не дозволяє знайти максимум, якщо він лежить не всередині, а на межі області.

Екстремальні значення функції Z(x1, x2, ..., xn) визначаються у фіксованій ділянці таким же чином, як і у випадку функції однієї змінної. Однак при великій кількості змінних це завдання стає практично нерозв'язним і доводиться користуватися методами лінійного та нелінійного програмування.

Як випливає з викладеного, необхідні умови застосування методів диференціального обчислення до завдань оптимізації такі: а) процес має бути однокроковим; б) наявність аналітичного виразу для цільової функції; в) диференційованість цієї функції за всіма змінними, хоча б двоаразова; г) відсутність обмежень на рішення.

Узагальненням методів диференціального обчислення випадки нескінченного числа змінних є варіаційне обчислення. Методи варіаційного обчислення дають змогу визначити екстремальні значення функціоналів. Якщо у виразі для цільової функції $Z(x_1, x_2, ..., x_n)$ число змінних n стає нескінченно більшим, це вираз можна записати як $Z[x(t)]$, де t – безперервна змінна. У цьому випадку функція x(t) розглядається як нескінченномірний аналог змінних $x_1, x_2, ..., x_n$. Якщо x(t) сама є функцією, що належить деякому класу функцій, то величина, що ставить у відповідність кожної функції цього класу дійсне число, називається функціоналом. Функціонал записують у вигляді

$$K = \int_a^b Z[x(t)]dt. \qquad (1.13)$$

У функціоналі значення інтеграла, тобто дійсне число, ставиться у відповідність кожної функції, що інтегрується з даного класу функції. Найпростіше завдання варіаційного обчислення (яке називають також першим або фундаментальним завданням варіаційного обчислення) полягає у знаходженні мінімуму або максимуму функціоналу виду

$$K = \int_a^b F(x, \dot{x}, t)dt. \qquad (1.14)$$

Для того щоб функція x(t) обертала функціонал (1.14) максимум або мінімум, необхідно, щоб вона задовольняла диференціальному рівнянню Ейлера

$$F_x - \frac{d}{dt}F_{\dot{x}} = 0, \qquad (1.11)$$

де Fx і Fx - приватні похідні функції F щодо x і x, відповідно. Однак у цьому найпростішому разі рівняння (1.11) вирішується який завжди.

Для вирішення варіаційних завдань використовуються як непрямі, і прямі методи. Сутність непрямих методів полягає у зведенні варіаційного завдання до дослідження диференціального рівняння або системи рівнянь. Прямі методи складаються з кількох етапів. Етап 1: побудова мінімізуючої послідовності кривих $x_1, x_2, ..., x_n$, таких що $\lim_{n\to\infty} K(X_n) = \mu$ (де μ - екстремум K). Етап 2: доказ того, що ця послідовність має граничну криву $x^{(0)}$. Етап 3: доказ законності граничного переходу $K\left[x^{(0)}\right] = \lim_{n\to\infty} K(x_n)$.

Як випливає з викладеного, необхідні умови застосування методів варіаційного обчислення задач оптимізації такі: наявність аналітичного виразу для цільової функції; безперервність та диференційованість цієї функції; відсутність обмежень на функції та координати.

Метод множників Лагранжа, як зазначалося вище, застосуємо за наявності функціональних обмежень виду

$$f_j = f_j(x_1, x_2, ..., x_n) = 0, \qquad (1.15)$$

де $j = 1, 2, ..., m.$

Для цільової функції $Z(x_1, x_2, ..., x_n)$ справедливе рівняння

$$dZ = \frac{\partial Z}{\partial x_1}dx_1 + \frac{\partial Z}{\partial x_2}dx_2 + ... + \frac{\partial Z}{\partial x_n}dx_n = 0, \qquad (1.16)$$

або

$$dZ = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial Z}{\partial x_i}dx_i = 0.$$

Продиференціювавши рівність (1.15), отримаємо

$$\left.\begin{array}{l} df_1 = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f_1}{\partial x_i}dx_i = 0; \\ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \\ df_m = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f_m}{\partial x_i}dx_i = 0. \end{array}\right\} \qquad (1.17)$$

Кожне з отриманих m рівнянь тепер помножимо на поки що невідомий параметр λ, який називається множником Лагранжа:

$$\left.\begin{aligned}
\lambda_1 df_1 &= \sum_{i=1}^{n} \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial x_i} dx_i = 0;\\
\lambda_2 df_2 &= \sum_{i=1}^{n} \lambda_2 \frac{\partial f_2}{\partial x_i} dx_i = 0;\\
& . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\
\lambda_m df_m &= \sum_{i=1}^{n} \lambda_m \frac{\partial f_m}{\partial x_i} dx_i = 0.
\end{aligned}\right\} \qquad (1.18)$$

Склавши рівняння (1.18) і додавши до них рівняння (1.16), отримаємо

$$\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial Z}{\partial x_i} + \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial x_i} + \lambda_2 \frac{\partial f_2}{\partial x_i} + \ldots + \lambda_m \frac{\partial f_m}{\partial x_i} \right) dx_i = 0. \qquad (1.19)$$

Оскільки всі параметри xi - незалежні, для того щоб це рівняння задовольнялося, достатньо, щоб кожен з n членів дорівнював нулю.

Таким чином, отримуємо n рівнянь

$$\frac{\partial Z}{\partial x_i} + \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial x_i} + \lambda_2 \frac{\partial f_2}{\partial x_i} + \ldots + \lambda_m \frac{\partial f_m}{\partial x_i} = 0. \qquad (1.20)$$

Крім того, є ще m рівнянь (1.15), що визначають обмеження. Таким чином, є m + n рівнянь і m + n невідомих, у тому числі n параметрів x_i та m множників Лагранжа. Рішення системи m + n рівнянь і дає оптимальне рішення, що шукається.

1.2.1.2. ЧИСЕЛЬНІ МЕТОДИ

Зазвичай, складні процеси (зокрема і процес проектування) є багатоетапними. Ця обставина у багатьох випадках унеможливлює використання аналітичних методів. Дуже ефективним методом оптимізації складних багатокрокових процесів є динамічне програмування (динамічний планування). Цей метод був запропонований та розвинений Р. Беллманом та його школою на початку 60-х років минулого століття. Основу динамічного програмування становить принцип оптимальності, який можна сформулювати в такий спосіб: оптимальне поведінка системи у час визначається лише її станом у цей час і кінцевим бажаним станом системи і залежить від поведінки системи у минулому. Іншими словами, керований процес є марківським, тобто передісторія не має значення щодо майбутніх дій. Пояснимо метод динамічного програмування з прикладу. Нехай деяка система має бути переведена зі стану x_0 до кінцевого стану x_k (рис.1.3).

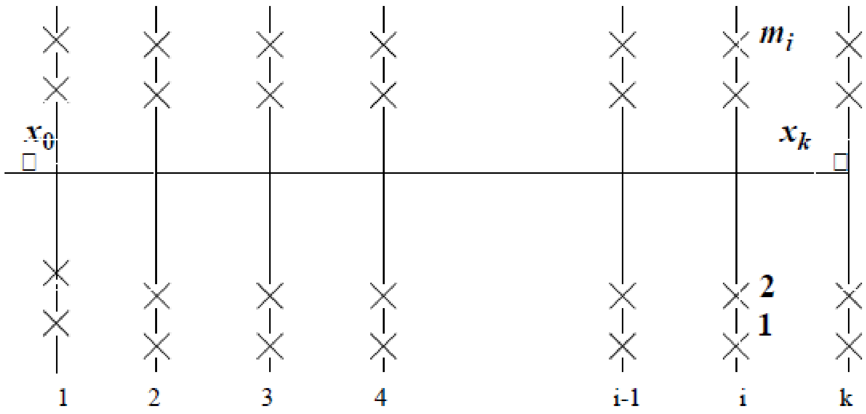


Рис. 1.3. Динамічне програмування

Розіб'ємо процес переходу на k етапів (кроків). Наприкінці кожного етапу система може бути в одному з m станів. Позначимо j-е стан системи на i-му кроці через xij, витрати (час, втрати) на перехід системи по оптимальній траєкторії з кожного j-го стану на i-му етапі процесу в кінцеву точку xk – через Qij. Управління на кожному кроці процесу, що оптимізується, позначимо через u0, u1 , ..., ui . Завдання оптимізації аналізованого багатокрокового процесу можна вирішити перебором всіх можливих управлінь. Однак цей підхід виявляється нереальним навіть у разі, коли кількість варіантів управління та можливих станів процесу (системи) порівняно невелика. Так, наприклад, для 10-крокового процесу, у якого можливий вибір одного з 10 варіантів управління на кожному кроці, необхідно перебрати 109 варіантів. Перебір цього числа варіантів за умови витрати на один варіант 1с вимагатиме 109 або більше 30 років.

Метод динамічного програмування дає можливість замінити перебір всіх варіантів розв'язання задачі певної системи операцій – програмою. При цьому обсяг обчислення різко скорочується, але все ж таки залишається настільки великим, що зазвичай не може бути виконаний вручну і повинен виконуватися на комп'ютері. Ідея динамічного програмування формально у тому, що пошук екстремуму функції багатьох змінних замінюється багаторазовим відшуканням екстремуму функції однієї чи небагатьох змінних. Іншими словами, одноразове вирішення складної задачі замінюється багаторазовим рішенням простою. Для динамічного програмування характерний наступний прийом: процес, що оптимізується, розділяється на ряд послідовних етапів (кроків) і проводиться послідовна оптимізація кожного з них, починаючи з останнього. Таким чином, процес завжди розгортається у зворотному за часом напрямі від кінця до початку. Якщо процес містить природних етапів, всі вони вводяться формально. Відстань між етапами вибирається при цьому як компромісне між вимогами точності та простоти рішення.

Завдання динамічного програмування зазвичай формулюється так: з безлічі допустимих управлінь uдоп необхідно знайти таке управління u, яке перекладає систему з початкового стану $x_0 \in X_{0доп}$ в остаточне $x_k \in X_{kдоп}$ так, щоб критерій якості $K(u)$ приймав максимальне значення

$$K = \max_u \left[K(u) \right]. \qquad (1.21)$$

При цьому система повинна знаходитися в допустимій області станів Хдод. Для фазового простору це завдання може бути сформульована так: знайти оптимальне управління u, під впливом якого точка фазового простору x переміститься з початкової області в кінцеву, не виходячи з допустимої області Хдоп так, щоб при цьому критерій K звернувся максимум.

Оптимізація управління багатокрокового (n-крокового) процесу, таким чином, зводиться до знаходження послідовності управлінь $u_0, u_1, ..., u_{n-1}$, забезпечує досягнення максимального значення критерію якості K(u) чи, що те, мінімального значення витрат (втрат, штрафів), тобто $\sum_{i=0}^{n-1} Q(x_i, u_i)$.

$$f_n(x_0) = \min_{u_0} \min_{u_1} ... \min \left[Q(x_0 u_0) + ... + Q(x_{n-1}, u_{n-1}) \right]. \qquad (1.22)$$

Перше доданок $Q(x_0,u_0)$ залежить лише від управління u_0 першому кроці. Інші доданки залежать як від u_0, і від управлінь інших кроках, тобто.

$$f_n(x_0) = \min_{u_0} \left\{ Q(x_0, u_0) + \min_{u_1} ... \min_{u_{n-1}} [Q(x_1, u_1) + ... + Q(x_{n-1}, u_{n-1})] \right\}. \qquad (1.23)$$

Позначимо

$$f_{n-1}(x_1) = \min_{u_1} ... \min_{u_{n-1}} \left[Q(x_1, u_1) + ... + Q(x_{n-1}, u_{n-1}) \right]. \qquad (1.24)$$

Тоді

$$f_n(x_0) = \min_{u_0} \left[Q(x_0, u_0) + f_{n-1}(x_1) \right]. \qquad (1.25)$$

У загальному випадку для (n - l)-крокового процесу, що починається зі стану x_l , отримаємо

$$f_{n-l}(x_l) = \min_{u_l} \left[Q(x_l, u_l) + f_{n-(l+1)}(x_{l+1}) \right]. \qquad (1.26)$$

Це так зване рівняння Беллмана, що є рекурентним співвідношенням, що дозволяє послідовно визначати оптимальне управління на кожному кроці керованого процесу. Характерною особливістю методу динамічного програмування є поєднання простоти розв'язання задачі оптимізації на окремому кроці з урахуванням найвіддаленіших наслідків цього кроку. Дійсно, вибір управління на окремому кроці проводиться не тільки виходячи з мінімізації втрат (або максимізації виграшу) на даному кроці, тобто величини $Q(x_i, u_i)$, але і з мінімізації сумарних втрат $Q(x_i, u_i) + f_{n-(i+1)}(x_{i+1})$ на наступних кроках.

У рівнянні Беллмана n - l означає кількість кроків остаточно процесу. Введемо нові позначення: $n - l = k$; $x_l = x_{n-k} = x$; $u_l = u_{n-k} = u$. Тут x і u означають стан об'єкта і застосоване управління за k кроків до кінця процесу.

З урахуванням нових позначень рівняння Беллмана представимо у вигляді

$$f_k(x) = \min_u \left[Q(x,u) + f_{k-1}(x') \right], \tag{1.27}$$

де x' - стан, якого переходить об'єкт зі стану x при застосуванні управління u.

Для проведення розрахунків на комп'ютері формулу (1.22) зручніше записати як

$$F_k(x,u) = Q(x,u) + f_{k-1}(x'); \tag{1.28}$$

$$f_k(x) = \min_u F_k(x,u). \tag{1.29}$$

Значення Q(x,u) зручно обчислити заздалегідь і вказати у вигляді таблиці, що має зберігатися у пам'яті комп'ютера.

Вимоги до структури процесів, що досліджуються методом динамічного програмування, такі: невелика кількість фазових координат; керований процес має бути марківським; критерій має властивість адитивності, т. е. його значення визначається підсумовуванням приватних значень, досягнутих на окремих кроках.

Основи лінійного програмування були закладені вітчизняною математичною школою у 30-х роках минулого століття (роботи акад. Л.В. Канторовича та його школи). Термін "лінійне програмування" виник 1951 р. у роботах американських математиків Дж. Б. Данцига і Т. Купманса. Завдання лінійного програмування є найпростішим випадком задач математичного програмування і формулюється так: необхідно знайти невід'ємні значення змінних $x_1, x_2, \ldots, x_n$, які мінімізують цільову функцію

$$Z = c_0 + c_1 x_1 + \ldots + c_n x_n \tag{1.30}$$

за наявності обмежень

$$\left. \begin{aligned} a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n &= b_1; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + \ldots + a_{mn}x_n &= b_m. \end{aligned} \right\} \tag{1.31}$$

Слід зазначити, що цільову функцію (1.25) часто називають лінійною формою, а обмеження, що представляють систему лінійно незалежних рівнянь з невідомими x1, ..., xn називають системою обмежень. Характерно, що число рівнянь менше від числа невідомих, тобто $m < n$.

Система рівнянь (1.26) для випадку $m = n$ розглядається у звичайній алгебрі. Якщо при цьому визначник системи не дорівнює нулю, система має тільки одне рішення. Для випадку $m < n$ система рівнянь (1.26) має безліч рішень.

На змінні x_i накладено додаткове обмеження невід'ємності $x_i \geq 0$, однак і таких рішень є безліч. Завдання лінійного програмування полягає у виборі з цієї множини рішень одного рішення, яке звертає в мінімум лінійну форму

(1.25). У ряді випадків усі або деякі обмеження (1.26) задаються у вигляді нерівностей виду

$$a_{ji}x_1 + ... + a_{jn}x_n \le b_j \tag{1.32}$$

або

$$a_{ji}x_1 + ... + a_{jn}x_n \ge b_j. \tag{1.33}$$

Такі нерівності легко перетворити на рівності, вводячи додаткову змінну $x_{n+j} \ge 0$ так, щоб залежно від знака нерівності мало місце одне з двох рівнянь

$$\left.\begin{aligned} a_{j1}x_n + ... + a_{jn}x_n + x_{n+j} = b_j; \\ a_{j1}x_n + ... + a_{jn}x_n - x_{n+j} = b_j. \end{aligned}\right\} \tag{1.34}$$

Таке перетворення збільшує кількість змінних, не змінюючи суті завдання.

Якщо завданням є не мінімізація, а максимізація цільової функції (1.25), вона зводиться до попередньої шляхом зміни знака виразу для Z , тобто.

$$Z' = -Z. \tag{1.35}$$

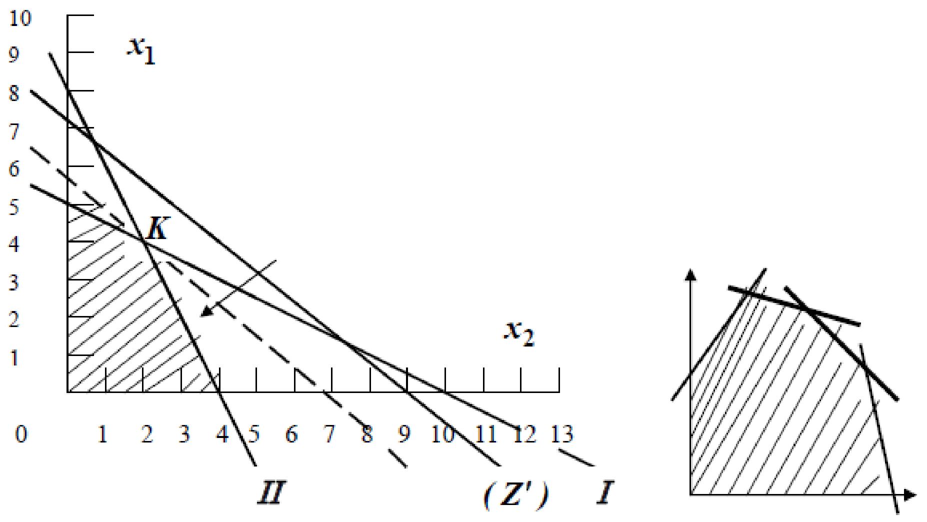
Цільову функцію запишемо у вигляді

$$Z' = 5x_1 + 4x_2. \tag{1.36}$$

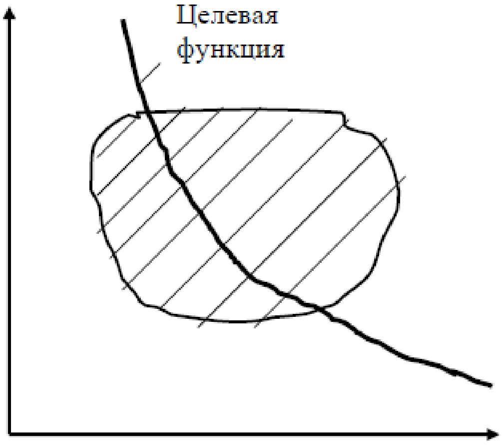
Система рівнянь, що становить обмеження, має вигляд

$$\left.\begin{aligned} 2x_1 + x_2 = 10; \\ x_1 + 2x_2 = 8. \end{aligned}\right\} \tag{1.37}$$

Для вирішення багатовимірних завдань лінійного програмування зазвичай використовується симплексний метод (симплекс-метод), що є раціональним способом послідовного перебору. Він називається також методом послідовного поліпшення плану, оскільки розв'язання задачі здійснюється за кілька ітерацій. Причому, на кожній наступній ітерації одержують план, найкращий у порівнянні з планом, отриманим на попередній ітерації.



а) б)



в) г)

Рис. 1.4. Геометрична інтерпретація лінійного (а, б) та нелінійного (в, г) програмування.

Щоб уникнути громіздких перетворень системи лінійних рівнянь з однієї форми в іншу, ці рівняння представляють у вигляді таблиць, що містять коефіцієнти при змінних. У цьому випадку перехід від однієї системи рівнянь до іншої зводиться до перерахунку коефіцієнтів у таблицях, що здійснюється за формальними правилами, що добре пристосовані для вирішення на комп'ютері. Цей метод отримав назву табличного методу знаходження оптимальних рішень. Відомі також такі методи оптимізації як метод потенціалів та метод гілок та кордонів (branch and bound method). Незважаючи на те, що область використання лінійних моделей дуже широка, у багатьох випадках ці моделі мало повно відображають реальні процеси (системи).

Методи нелінійного програмування розроблені меншою мірою, ніж методи лінійного програмування, що пов'язано не стільки з порівняльною новизною цих методів, скільки з їх складністю. У двовимірному випадку області рішень і цільова функція можуть мати найрізноманітнішу конфігурацію (рис.1.4, г). Якщо методи розв'язання задач з опуклою областю рішень і з увігнутою (для задач на максимум) або опуклою (для задач на мінімум) цільовою функцією розроблено порівняно добре, то в інших випадках зазвичай нелінійні залежності апроксимуються лінійними і задачі вирішуються методами лінійного програмування.

Великий клас завдань вирішується методами цілісного програмування, що є методами оптимізації лінійних моделей у разі, коли змінні величини видаються лише цілими числами. Для вирішення завдань цілісного програмування використовується ряд спеціальних методів, однак у багатьох випадках чинять інакше: вирішують лінійну задачу звичайними методами і потім округляють отримані величини до цілих значень.

Геометричне програмування є одним із розділів нелінійного програмування і дозволяє вирішувати завдання оптимізації, в яких критерій оптимальності та обмеження виражаються нелінійними функціями виду

$$Z = \sum_{i=1}^{n} c_i \prod_{j=1}^{m} t_j^{a_{ij}} \tag{1.38}$$

де c_i – вагові коефіцієнти; t_j – незалежні змінні; a_{ij} – показник ступеня.

Вирази виду доданків (1.33) автори методу геометричного програмування називають позиномами (posinomials). Позиноми мають властивість опуклості. Ця властивість легко може бути доведена, якщо в доданках співвідношення (1.33) провести заміну змінних $y_i = ln\, t_j$ і взяти другі похідні по y_i, які виявляються завжди позитивними.

Розглянемо завдання, у якому потрібно знайти оптимум функції виду

$$Z = c_1 t^{a_1} + c_2 t^{a_2}. \tag{1.39}$$

Введемо так звану природну змінну

$$y = ln\, t \tag{1.40}$$

та позначення

$$\left. \begin{aligned} u_1 &= c_1 (e^y)^{a_1}; \\ u_2 &= c_2 (e^y)^{a_2}. \end{aligned} \right\}. \tag{1.41}$$

Тоді умову оптимальності Z можна записати як

$$\frac{d}{dy}(u_1 + u_2) = 0$$ в точці y^*.

Індекс * відноситься до значень, які параметри набувають у точці оптимуму у . З рівняння (1.42) отримуємо:

$$a_1 u_1^* + a_2 u_2^* = 0. \tag{1.43}$$

Якщо розглядати a1 та a2 як компоненти вектора показників, а u_1^* і u_2^* як компоненти вектора рішень, то (1.43) можна переписати як

$$\begin{Vmatrix} a_1 \\ a_2 \end{Vmatrix} \quad \begin{Vmatrix} u_1^* \\ u_2^* \end{Vmatrix} = 0, \tag{1.44}$$

звідки

$$\begin{Vmatrix} a_1 \\ a_2 \end{Vmatrix} \quad \begin{Vmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \end{Vmatrix} = 0, \tag{1.45}$$

$$\delta_1 + \delta_2 = 1.$$

Оптимум цільової функції

$$Z^* = \left(\frac{c_1}{\delta_1}\right)^{\delta_1} \left(\frac{c_2}{\delta_2}\right)^{\delta_2} \dots \left(\frac{c_n}{\delta_n}\right)^{\delta_n}. \tag{1.49}$$

Метод геометричного програмування може бути поширений на випадок n>m+1, а також на випадок, коли незалежні змінні є функціями довільного вигляду. Детальний виклад цих питань буде розглянуто нижче.

Досі не розглядалося питання щодо методики знаходження двоїстого вектора. Слід зазначити, що це основна числова операція (над матрицями), що використовується методом геометричного програмування. Існують алгоритми визначення двоїстого вектора, наприклад алгоритм Бранда, але в загальному випадку зазначена методика вимагає ерудиції дослідника.

Ступенева функція типу (1.33) дозволяє апроксимувати досить широкий клас залежностей у різних галузях науки, техніки та технології; якщо (до того ж) завдання можна звести до випадку n=m+1, то неважко бачити, що геометричне програмування є дуже ефективним апаратом попередніх оціночних інженерних розрахунків.

1.2.1.3. ЕВРИСТИЧНЕ ПРОГРАМУВАННЯ

Евристичні методи націлені рішення особливо складних завдань, які важко чи неможливо вирішити іншими способами. Евристичне програмування виникло внаслідок спроби скласти програму на вирішення на комп'ютері завдань, котрим немає чи невідомі суворі алгоритми. При цьому використовуються методи вирішення, схожі на ті, що їх використовують люди. Евристичне програмування ґрунтується на вивченні процесів вирішення задач оптимізації людиною і є спробою промоделювати на комп'ютері процес індуктивного висновку. Під індуктивним висновком розуміється методика пошуку рішення, коли з урахуванням деякої гіпотези робляться висновки чи вирішується завдання, у своїй використовується метод спроб і помилок (trial and error method). Евристичне вирішення завдання починається з вибору гіпотез, які потрібно перевірити. Як критерій придатності гіпотез використовується наявна інформація, у своїй робиться спроба відокремити можливі рішення від неможливих. Подібні критерії називаються евристиками завдання. Існує два типи евристик: синтаксичні та семантичні, названі так відповідно до типу об'єкта, що перевіряється в процесі застосування евристики.

Слід пам'ятати, зазвичай людина вирішує завдання цілком, а розбиває їх у більш легкі підзадачи, які у сукупності еквівалентні загальної задачі. Таке розбиття загальної задачі на підзавдання отримало назву методу регресії, що у загальному вигляді може призвести до мети. Це є однією з властивостей евристичних методів - немає гарантії, що рішення буде отримано.

Спочатку евристичне програмування призначалося на вирішення математичних завдань. Так, програма, створена на підтвердження геометричних теорем, було названо теоретикологічної. Крім того, евристичне програмування використовується, наприклад, для складання програм гри в шахи, розробки програм проектування багатошарових друкованих плат, програм конструювання мікромодулів, програм розпізнавання геометричних образів, програм «вигадування» музичних творів тощо.

Основними напрямками евристичного програмування є:

заміна моделі процесу. У ряді випадків відомі методи оптимізації неможливо проаналізувати модель. Тоді її замінюють іншою моделлю, побудованою на основі досвіду спеціалістів. Ця модель може не суворо відображати суть процесу, але піддається дослідженню;

звуження галузі дослідження. При пошуку оптимальних рішень фахівці, спираючись на досвід та інтуїцію, можуть вести додаткові обмеження на область допустимих рішень, чим полегшується вирішення завдання;

завдання “опорного плану”, т. е. програми, оптимальної з погляду фахівців. Це полегшує дослідження, оскільки дозволяє обмежитися перевіркою зміни критерію ефективності над всій області вирішенні, лише у околиці самого рішення;

Використання інтуїтивних методів. Ці несуворі методи виробляються практикою фахівців.

Евристичні методи не повинні протиставлятися розглянутим вище аналітичним та чисельним методам, які можна віднести до алгоритмічних методів оптимізації. Необхідно знаходити їхнє розумне поєднання. Це доцільно і тому, що, як свідчать дослідження, й інші методи мають загальну основу.

Зупинимося на методології евристичного програмування (рис. 1.5). Дослідник ІВ задає об'єкту дослідження ОІ, тобто випробуваному, тестову задачу і, спостерігаючи за її рішенням, будує модель МД. Модель досліджується на комп'ютері, і отримані результати зіставляються з поведінкою ОІ пристрої порівняння УС.

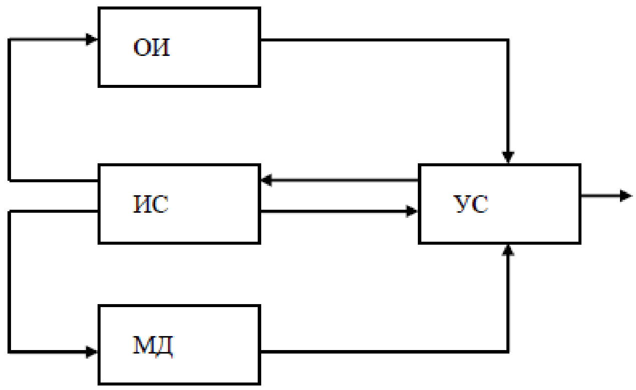


Рис.1.5. Евристичні методи оптимізації.

Якщо функціонування ОІ та моделі не збігаються, то шукаються та усуваються причини розбіжності. Обгрунтуванням наведеної методології є процедура Л. Тьюринга, яка з його “гри в імітацію”.

Як зазначалося, евристичне програмування дуже перспективне на вирішення завдань великої розмірності і, передусім, завдань проектування складних систем. Тут можливе безліч варіантів. Досвідчений проектант, як правило, відразу відкидає більшість варіантів, керуючись своїм досвідом.

При проектуванні широко (і часом недостатньо усвідомлено) використовуються різного роду евристичні правила та алгоритми. Досить вказати те що, що досвідчений конструктор дає остаточну оцінку конструкції з критерію “виглядає - не виглядає”. Доцільно виявити ці правила, зробивши їх надбанням проектантів.

1.2.1.4. СТОХАСТИЧНЕ ПРОГРАМУВАННЯ

Стохастичне програмування дає методи вирішення умовних екстремальних завдань за неповної інформації про параметри досліджуваного процесу. Як відомо, вихідна інформація для проектування технологічних процесів та систем недостатньо до стоверна. Прикладами цього можуть бути невизначеність ріжучих властивостей інструменту, жорсткості металорізальних верстатів тощо. Таким чином, при проектуванні окремі або всі параметри критерію якості, а також обмеження можуть бути невизначеними або випадковими. Зазвичай при вирішенні подібних завдань, коли параметри цільової функції та (або) обмежень – випадкові величини, розглядають математичні очікування величини, тобто зводять стохастичну задачу до детермінованої. Однак подібний розгляд не є суворим, оскільки при усередненні параметрів може бути порушена відповідність математичної моделі досліджуваного процесу. Використовується також інший прийом, який зводиться до обчислення математичного очікування критерію із застосуванням теорії ймовірностей або частіше методу статистичних випробувань. При цьому максимізують (або мінімізують) цей критерій, варіюючи управліннями. Однак цей прийом пов'язаний із значними ускладненнями.

Слід пам'ятати, що розв'язання завдань стохастичного програмування пов'язані з низкою труднощів. По-перше, не завжди вдається коректно поставити завдання, іншими словами, домогтися того, щоб імовірнісна модель досить добре описувала досліджуваний процес. По-друге, досі немає методів, які б впевнено вирішувати завдання оптимізації таких моделей.

Можна виділити дві можливі постановки завдання стохастичного програмування: жорстка або одноетапна, і нежорстка або двоетапна. Для жорсткої постановки неприйнятно, щоб за будь-яких випадкових впливів порушувалися б обмеження. Подібна ситуація описується наступною моделлю: необхідно знайти детермінований вектор x, що забезпечує максимум математичного очікування лінійної цільової функції

$$Z = \sum_{i=1}^{n} c_i(\theta) x_i , \tag{1.52}$$

при умовах (обмеженнях):

$$\left.\begin{aligned} &\sum_{i=1}^{n} a_{ij}(\theta) x_i \le b_i(\theta); \\ &j = 1, 2, ..., m; \\ &\theta \in R; \\ &x_i \ge 0; \quad i = 1, 2, ..., n. \end{aligned}\right\} \tag{1.53}$$

Тут $a_{ij}(\theta); b_j(\theta);\ c_i(\theta)$ приймають випадкові значення залежно від значення, що приймається випадковим параметром θ. Кожна реалізація визначає багатогранник допустимих планів відповідного завдання лінійного програмування. Зазначимо, що реалізацію параметра θ називають елементарною подією (станом природи), а безліч можливих значень цього параметра називають простором елементарних подій (множиною можливих станів природи).

Для будь-якої елементарної події повинні задовольнятися всі обмеження, що належать усім можливим багатогранникам допустимих планів. Якщо перетин цих багатогранників порожній, то допустимого плану завдання немає.

Якщо безліч елементарних подій, звичайно, то стохастична задача може бути зведена до такої детермінованої задачі.

Знайти $max\sum_{i=1}^{n}\overline{c}_i(\theta)x_i$ при умовах

$$\sum_{i=1}^{n}a_{ij}^k x_i \le b_j^k; \quad j = 1, 2, ..., m; \tag{1.54}$$
$$k = 1, 2, ..., K; \quad x_i \ge 0.$$

Тут $\overline{c}_i(\theta)$ - середнє значення випадкової величини $\overline{c}_i(\theta)$, взяте щодо всіх можливих елементарних подій;

k - кількість можливих елементарних подій;

a_{ij}^k і b_j^k - коефіцієнти, що відповідають реалізації k-ї елементарної події.

Якщо k велике, то складність рішення визначається великою розмірністю завдання.

1.2.1.5. МЕТОДИ РІШЕННЯ ЗАВДАНЬ НЕЛІНІЙНОГО ПРОГРАМУВАННЯ

На відміну від завдань лінійного програмування у нелінійному програмуванні відсутні універсальні методи типу симплекс-метода. Найбільш поширені такі методи:

1. Метод множників Лагранжа.
2. Умови Куна-Таккера.
3. Градієнтні методи.

У свою чергу, градієнтні методи (тобто методи, в яких використовується градієнт цільової функції) поділяються на дві основні групи. До першої групи належать методи, застосування яких не призводить до виходу за межі області допустимих значень під час руху до стаціонарної точки. До таких методів належить, наприклад, метод лінійних комбінацій. Застосування методів другої групи допускає під час пошуку стаціонарних точок вихід межі області допустимих рішень, але з подальшим поверненням у цю область. До таких методів належать, наприклад, метод штрафних функцій і різновид його – метод Ерроу-Гурвіца. Наприклад, метод штрафних функцій (метод штрафів) ось у чому. Нехай потрібно максимізувати функцію

$$f(\overline{x}) = f(x_1, x_2, ..., x_n) \tag{1.55}$$

при обмеженнях у вигляді нерівностей

$$g_i(\overline{x}) \geq 0, \quad i = 1,2,...,m. \qquad (1.56)$$

Часто зустрічаються обмеження виду $x_i \geq 0, \quad i = 1,2,...,n$ можна включити до обмежень (1.56). Тепер замість завдання (1.55) – (1.56) вирішують серію пов'язаних з нею завдань таких, що в кожній з них потрібно знайти максимум деякої допоміжної функції без обмежень, тобто безумовний максимум. Можна вибрати спеціальні допоміжні функції. Так, знайдені безумовні максимуми призведуть до максимуму завдання (1.55) – (1.56). Причому якщо вихідна задача мала локальні (відносні) максимуми, тобто була багатоекстремальною задачею, то тепер будуть знайдені безумовні локальні максимуми допоміжних функцій, які призведуть до локальних максимумів завдання (1.55) - (1.56). Спрощення завдання у тому, що методи відшукання безумовного максимуму функції кількох змінних вже давно добре розроблені. Наприклад, ще на початку XIX століття один із перших таких методів був запропонований Коші - метод якнайшвидшого спуску (для завдання на максимум слід сказати метод якнайшвидшого підйому). Відомі також інші методи безумовної максимізації: Ньютона, Флетчера-Рівса, змінної метрики та ін. Ці методи використовують перші або другі приватні похідні функції, що максимізується. І хоча тут є свої проблеми, завдання безумовної максимізації (на відміну від умовної) виявляється значно легшим, ніж завдання на максимізацію за наявності обмежень.

1.2.1.6. ОПТИМІЗАЦІЯ ЯКІСНИХ ХАРАКТЕРИСТИК

Під час проектування систем доводиться вирішувати завдання оптимізації якісних характеристик. До завдань такого типу можна віднести, наприклад, вибір найкращого з позицій технічної естетики зовнішнього вигляду машини чи апаратури. Для вирішення подібних завдань відомими кількісними методами необхідно якісним характеристикам надати відповідні кількісні оцінки. З цією метою зазвичай використовується метод експертних оцінок. Сутність методу у тому, що з оцінки якісних характеристик залучається група компетентних фахівців (експертів) й у найпоширенішому разі кожен із експертів дає кількісну оцінку незалежно від інших. Оцінки експертів за допомогою будь-якого прийому поєднуються в узагальнену (узгоджену) оцінку.

Найбільш поширеним методом оцінки експертами є ранжування. Під ранжируванням розуміється розташування n об'єктів (присвоєння номера) у порядку зростання чи зменшення оцінюваного ознаки x , кількісно не вимірного. Ранг x_i вказує місце, яке займає i-й об'єкт серед інших n-1 об'єктів, ранжованих відповідно до ознаки x. Найбільш поширеним прийомом об'єднання оцінок експертів ранжирування є визначення середнього рангу. Середній ранг може визначатися або як середня арифметична сукупність рангів, або як середня зважена з урахуванням вагових коефіцієнтів, що визначаються кваліфікацією експертів.

1.2.2. КЛАСИФІКАЦІЯ ЗА ОЗНАКОЮ ЛІНІЙНОСТІ

За характером та особливостями цільових функцій F(x) та обмежень gi(x) розрізняють два основні класи задач – завдання лінійного та нелінійного програмування (розділ 1.2.1). До першого класу відносяться завдання, в яких цільова функція F(x) та обмеження gi (x) є лінійними щодо складових x j (j 1,n). До другого класу – завдання, у яких F(x) та (або) gi (x) є нелінійними.

1.2.3. КЛАСИФІКАЦІЯ ЩОДО ЗМІСТКОЇ ПОСТАНОВКИ

Розрізняють такі класи завдань:
1) управління запасами;
2) розподіл ресурсів;
3) технічне обслуговування;
4) масове обслуговування;
5) складання розкладів;
6) мережеве планування та управління;
7) вибір маршруту;
8) комбіновані завдання.

Завдання управління запасами пов'язані з визначенням оптимального обсягу (кількості) деякого продукту (у т.ч. сировину та напівфабрикати), що підлягає зберіганню та витраті за заявками споживачів (у т. ч. так звані міжопераційні заділи). Ці завдання характерні тим, що зі збільшенням запасів зростають витрати на їх зберігання, але зменшуються втрати через можливу їх нестачу. Завдання оптимізації полягає у визначенні такого рівня запасів, при якому мінімізується сума очікуваних (прогнозованих) витрат зі зберігання запасів та втрат внаслідок їх нестачі.

Завдання розподілу ресурсів мають місце у випадках, коли заданий певний набір запланованих для виконання робіт при обмежених ресурсах. Можливі різні наведені нижче постановки цього завдання.

1. Задані роботи та ресурси. Потрібно розподілити ресурси між роботами таким чином, щоб максимізувати певний захід ефективності (прибуток) або мінімізувати очікувані витрати.

2. Задано лише готівкові ресурси. Потрібно визначити набір робіт, який можна з урахуванням цих ресурсів, забезпечуючи максимум прибутку.

3. Задано лише роботи. Потрібно встановити черговість їх виконання, за якої мінімізуються витрати на їх виконання.

Примітка. У зарубіжній літературі завдання управління запасами (inventory management) представлені двома концепціями: планування матеріальних потреб (Material Requirement Planning чи MRP) та планування виробничих ресурсів (Manufacturing Resource Planning чи MRP II). Концепція MRP II охоплює виробничі, технічні та фінансові ресурси.

Завдання технічного обслуговування виникають переважно у випадках, коли потрібно визначити періодичність контролю, ремонту та заміни обладнання внаслідок його зносу та старіння. Можливе наступне трактування цього завдання: визначити терміни відновлювального ремонту та заміни обладнання модернізованим, за яких сумарні очікувані витрати на ремонт та заміну, а також втрати через погіршення технологічних характеристик або простою обладнання (у разі його виходу з ладу) мінімізуються.

Завдання масового обслуговування розглядають питання освіти та функціонування черг, наприклад, черги літаків (що йдуть на посадку), суден (що чекають на причалу), абонентів (що чекають виклик на міжміській АТС), заготовок (що підлягають обробці на верстатах) тощо.

Черги виникають унаслідок некерованості та випадковості потоку вимог чи заявок на обслуговування за обмеженої кількості одиниць технологічного обладнання для обслуговування. Якщо ця кількість велика (злітно-посадкових смуг аеродрому, причалів у морському порту, ліній зв'язку на АТС, верстатів у цеху тощо), то черга може не виникати, але при цьому виникатимуть простої обладнання. З іншого боку, при малій кількості одиниць обладнання обслуговування створюється значна черга і виникатимуть втрати через очікування в черзі. У цьому випадку можлива наступна постановка задачі оптимізації: визначити, скільки одиниць обладнання необхідно, щоб мінімізувати сумарні очікувані втрати від несвоєчасного обслуговування та простою обладнання.

Завдання складання розкладів (календарне планування) мають таке змістовне трактування: нехай є безліч різних деталей з певними технологічними маршрутами, а також кілька одиниць обладнання, що обробляє ці деталі (фрезерні, токарні, стругальні і т.п. верстати). Одночасна обробка більше однієї деталі кожному типі устаткування неможлива. Тому в деяких типів цього обладнання може утворюватися черга деталей на обробку. Час обробки кожної деталі відомий. Завдання оптимізації може бути сформульовано наступним чином: визначити таку черговість обробки деталей на кожному типі обладнання, при якій мінімізується, наприклад, загальна тривалість завершення комплексу робіт.

Завдання мережевого планування та управління в основному мають місце при розробці складних та дорогих проектів. У цьому вся класі вирішуються дві групи завдань: за критерієм “Час” і за критерієм “Вартість”. У першій групі за наявності вихідних даних із виконання проекту (і навіть виділених ресурсів) потрібно так розподілити ці ресурси за всіма видами робіт, щоб загальна тривалість всього комплексу робіт була мінімальною. У другій групі задано тривалість всього комплексу робіт. При цьому потрібно визначити таку послідовність виконання окремих видів робіт та розподілити ресурси, щоб загальні витрати на виконання всього комплексу робіт були мінімальними.

Завдання вибору маршруту (транспортні завдання) найбільш характерні щодо різноманітних процесів на транспорті й у системах зв'язку. Однією з типових завдань цього класу є завдання визначення маршруту проходження з одного пункту в інший за наявності декількох маршрутів для різних проміжних пунктів. Завдання оптимізації полягає у визначенні найбільш економічного маршруту відповідно до прийнятої цільової функції. Вирішення такої задачі може бути пов'язане з урахуванням низки обмежень: заборона на повернення до пройденого проміжного пункту, обхід усіх проміжних пунктів транспортної мережі з умовою знаходження в кожному з них не більше одного разу і т.п.

Комбіновані завдання характеризуються поєднанням одночасно кількох оптимізаційних завдань, кожна з яких може мати свою цільову функцію та умови вирішення. Такі завдання належать до багатокритеріальних.

Наведена класифікація завдань оптимізації перестав бути повної, оскільки їх специфічні особливості у конкретних ситуаціях можуть висунути та інші класифікаційні ознаки. Розподіл оптимізаційних завдань на класи становить значний інтерес, оскільки дозволяє вдосконалювати існуючі та розробляти нові методи вирішення таких завдань.

1.2.4. КЛАСИФІКАЦІЯ ЗА КІЛЬКІСТЮ ЦІЛЬОВИХ ФУНКЦІЙ

За кількістю критеріїв оптимізації можна виділити два класи завдань: одно- та багатокритеріальні. Багатокритеріальні завдання оптимізації пов'язані з пошуком рішень, ефективність яких оцінюється одночасно за декількома цільовими функціями. Причому одні із цих цільових функцій бажано максимізувати, інші – мінімізувати. Така множинність показників ефективності керованої системи є характерною для будь-якої складної задачі. p align="justify"> Багатокритеріальність може виникати при управлінні декількома взаємопов'язаними об'єктами досліджуваної системи, ефективність кожного з яких оцінюється своїми критеріями. Крім того, і одиночний об'єкт у різних ситуаціях може оцінюватись за різними показниками. Наприклад, при оцінці діяльності промислового підприємства доводиться враховувати низку показників: прибуток, повний обсяг продукції, енергетичні витрати на одиницю продукції, собівартість, якість продукції і т.д. Причому жоден із показників не може бути обраний як єдиний.

Існують різні методи оцінок рішень багатокритеріальних завдань оптимізації. Серед них найбільше практичне застосування отримали два способи: формування множин домінуючих рішень (множини Парето) та послідовний вибір поступок. Крім того, для цієї мети можливе використання різних "узагальнених критеріїв" (складових цільових функцій), що являють собою скалярну функцію прийнятих окремих критеріїв F1, F2, ..., Fn. Шлях застосування складових цільових функцій зазвичай виявляється оманливим, оскільки вибір зазначеної скалярної функції пов'язані з введенням низки невизначеностей. Невизначеності породжуються, наприклад, складністю обґрунтування параметрів цільової функції (вагових коефіцієнтів, показників ступенів тощо), проблематичність інтерпретації результатів рішень.

1.3. ОПТИМІЗАЦІЯ ТЕХНОЛОГІЧНИХ ПРОЦЕСІВ МЕТОДОМ ПЛАНУВАННЯ ЕКСПЕРИМЕНТУ

Як зазначалося вище, для вирішення екстремальних завдань необхідно мати математичну модель об'єкта, що вивчається (економічного, технологічного, технічного тощо). Основним об'єктом, наприклад, технологічних досліджень є технологічні системи, в яких формуються задані конструктором показники якості виробу, що гарантують його надійність та довговічність у період експлуатації. Для оптимізації технологічних процесів та систем потрібні відповідні математичні моделі цих об'єктів. Основними методами наукового дослідження технологічних об'єктів є теорія та експеримент. Існує два основних підходи до вирішення екстремальних завдань, один із них пов'язаний зі створенням теорії процесів. Наприклад, для технологічного процесу можна вивчати теплові явища, теорію забезпечення точності та якості виробів, теорію базування заготовок тощо. Цей підхід є перспективним. Однак часто від нього доводиться відмовлятися, тому що потрібний значний час для створення адекватної теорії. Саме з цієї причини дуже поширений так званий емпіричний метод розв'язання екстремальних завдань, що ґрунтується на теорії екстремальних експериментів. Основи цієї теорії були закладені працями вітчизняних (Адлер Ю.П., Налімов В.В. та інші) та зарубіжних (Box G.E.P., Wilson K.B. та інші) вчених. Ця теорія дозволяє оптимально проводити експеримент за неповного знання механізму процесу. У плануванні екстремального експерименту технологічний об'єкт представляється як так званого "чорного ящика", в якого вхідні впливу – чинники, вивідні величини – параметри (показники) оптимізації. Стратегія пошуку оптимуму полягає у послідовній постановці невеликих серій дослідів. Завдання розбивається на два етапи. У першому етапі з допомогою повного факторного експерименту (ПФЭ) будують лінійне рівняння регресії, проводять оцінку емпіричних коефіцієнтів моделі та статистичний аналіз результатів. Адекватність отриманого рівняння регресії для функції відгуку дає можливість перейти до руху найбільш коротким шляхом у напрямку градієнта функції відгуку. Рух по градієнту реалізується доти, доки покращуються значення параметра оптимізації. Якщо досягти оптимуму не вдається, то ставиться нова серія дослідів і визначається новий напрямок руху по градієнту. Таким чином, стратегія оптимізації полягає в чергуванні факторного планування та руху по градієнту до досягнення "майже стаціонарної області", області оптимуму. Сутність та приклади вирішення завдань ПФЕ представлені в наступному розділі.

1.3.1. ПЛАНУВАННЯ ЕКСТРЕМАЛЬНОГО ЕКСПЕРИМЕНТУ

Часто необхідно знайти такі режими процесу, у яких досягається оптимальний варіант. Екстремальним називається експеримент, спрямований на відшукання екстремуму функції регресії. При виборі методу екстремального планування вирішальною є обставина вартість експериментів. Якщо вартість експерименту висока і їхня допустима кількість невелика, то найбільш доцільним є статистичний план, при якому вимірювання проводяться в точках деякої сітки в заданій підобласті факторного простору. Це можуть бути послідовні плани, які мають асимптотичну властивість збіжності одержуваної послідовності точок до точки локального (відносного) екстремуму функції регресії.

У загальному випадку стратегія пошуку екстремуму полягає у послідовній постановці невеликих серій дослідів. Спочатку одержують, наприклад, лінійне рівняння регресії. Адекватність цього рівняння дає можливість перейти до руху найбільш коротким шляхом у напрямку градієнта функції відгуку. Одним із відомих методів екстремального планування є, наприклад, метод Бокса-Вільсона (Box G.E.P., Wilson K.B.), опублікований у 1951 році. Розпочатий авторами методу напрям за тим перетворився на цілу галузь математичної теорії експерименту. Наприклад, відомі такі методи планування екстремальних експериментів, як метод штрафних функцій, метод множників Лагранжа, симплексний метод, метод крутого сходження та інші. Ці ж методи можна застосовувати до теоретичних (на відміну від емпіричних рівнянь регресії) математичних моделей. У цьому випадку виміри (в експерименті) замінюються обчисленнями (за рівнянням теоретичної моделі).

1.4. ОПТИМІЗАЦІЯ ТЕХНОЛОГІЧНИХ ПРОЦЕСІВ ВИГОТОВЛЕННЯ ТА РЕМОНТУ МАШИН

Проектування технологічних процесів обробки деталей та складання машин (при їх виготовленні та ремонті) є складним системним завданням визначення структури та параметрів цих процесів. Застосування інструментарію оптимізації для цілей проектування дозволяє конкретизувати і визначити структуру і параметри проектованого технологічного об'єкта, хоча в цілому постановка і вирішення задачі оптимізації належить до проблемних питань у сучасній технології машинобудування. Будь-який технологічний процес можна подати структурною схемою (рис.1.6), основним елементом якої є технологічна операція

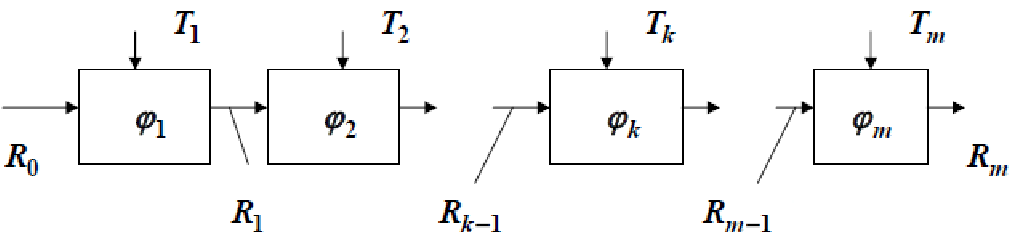


Рис.1.6. Структурна схема взаємозв'язків параметрів технологічного процесу: φ_k -технологічна операція; $T_k = \left\{ t_k^1, t_k^2, ...t_k^{n_k} \right\}$ - набір технологічних факторів на k-ої операції; $R_k = \left\{ r_k^1, r_k^2, ..., r_k^{n_k} \right\}$ - набір характеристик деталі після k-ої операції.

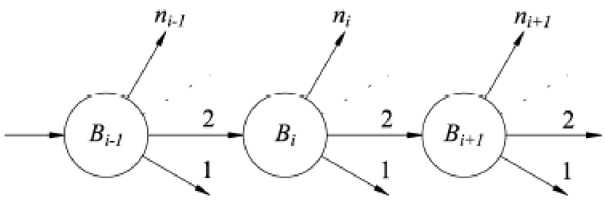


Рис. 1.7. Стратегія проектування типу "послідовний рух".

У свою чергу кожна операція є результатом вибору кількох альтернатив у стратегії проектування типу “послідовний рух” (рис. 1.7).

Як випливає з аналізу рис.1.7, кількість можливих рішень, які можуть бути прийняті, наприклад, на трьох послідовних етапах проектування становить.

$$W_3 = n_{i-1} n_i n_{i+1}, \tag{1.81}$$

де ni-1 ,ni ,ni+1 - число альтернативних рішень на (i - 1)-му, i -му та (i + 1)-му етапах. Наприклад, ni-1=3 (прокат, штампування, виливок); ni=3 для прокату (класи точності А, Б, В); ni = 5 для штампування (класи точності Т1, Т2, Т3, Т4, Т5); ni 22 для виливки; ni+1 = 3 (кількість можливих маршрутів обробки для обраного класу точності заготівлі). Тоді W3min = 3·3·3=27, W3max = 3 · 22·3 = 198, тобто 27 ≤W3 ≤ 198.

Таким чином, розглянутий приклад показує, що кількість альтернативних варіантів рішень на інтервалі проектування, що містить всього три послідовні етапи, становить від 27 до 198. Враховуючи, що при розробці технологічних процесів кількість етапів проектування набагато більше трьох, а кількість альтернативних рішень підпорядковується закону, близькому до геометричної прогресії, можна дійти висновку, що кількість альтернативних варіантів проектів навіть найпростішої стратегії проектування – стратегії послідовного руху - може досягати десятків і сотень тисяч. Отримання, аналіз, оцінювання та зрештою оптимізація такої величезної кількості проектів вручну неможлива. Тому в кожній прикладній дисципліні протягом десятиліть формувалися спрощені підходи, наприклад, засновані на запозиченні вже одержаних (перевірених практикою) рішень. Прикладом є проектування оптимізоване на основі типових технологічних процесів. При проектуванні технологічних процесів методом синтезу кількість можливих варіантів:

$$M = \prod_{i=1}^{N} M_i, \tag{1.82}$$

де Mi - число варіантів розв'язання кожної технологічної задачі, що розглядається при проектуванні технологічного процесу (вибір виду заготовок, схем базування, моделей верстата, типів різального інструменту тощо); N – число завдань технологічного проектування. З порівняння формул (1.81) і (1.82) видно, що формула (1.81) є окремим випадком більш загальної формули (1.82).

Слід зазначити, що сам по собі технологічний процес розробляється на одному з етапів життєвого циклу виготовлених машин (етап технологічної підготовки виробництва), що безпосередньо впливає на етап експлуатації 1 цих машин. У свою чергу, на етапі експлуатації проводиться ремонт машин, технологічні особливості та трудомісткість якого зумовлюються попередніми етапами життєвого циклу, у тому числі етапом технологічного проектування.

Розрізняють структурну та параметричну оптимізацію технологічних процесів. У першому випадку йдеться про вибір оптимального складу технологічного процесу (технологічний маршрут, вид заготівлі, тип обладнання, інструменту тощо). У другому – визначають оптимальні технологічні параметри (міжопераційні розміри заготовок та допуски на них, припуски на обробку та допуск на них, режими різання тощо). Класичним завданням параметричної оптимізації є розрахунок оптимальних режимів різання.

ОПТИМІЗАЦІЯ МЕТОДОМ ВИПАДКОВОГО ПОШУКУ

При всій "витонченості" математичних виразів (1.106) та (1.107) для ефективного розрахунку оптимальних глибин зубошліфування за цими математичними виразами потрібно підібрати відповідний метод чисельного розв'язання системи (n-1) нелінійних (трансцендентних) рівнянь. Існують десятки способів комп'ютерного перебору параметрів, що дозволяють знайти оптимальні значення, виходячи з умови екстремуму цільової функції. Тут слід зазначити, що, перш ніж шукати ці оптимальні значення, слід попередньо довести їхнє існування. У попередньому підрозділі доведено існування екстремуму цільової функції (1.91). Тому визначення цього екстремуму скористаємося, наприклад, методом випадкового пошуку. Як довідку відзначимо, що цей метод належить до комбінаторних методів. Прийоми випадкового пошуку різноманітні, проте загальна ідея всіх цих методів ось у чому. Вирушаючи від деякої допустимої точки, знайденої будь-яким чином (задають глибини шліфування t1 ,t2 ,...tn-1 рівними випадковим числам, кожне з яких менше припуску на обробку Z), роблять крок у випадковому напрямку і стежать за тим, щоб не вийти з допустимої множини екстремальної задачі. Залежно від того, більше або менше значення набуває при цьому досліджувана цільова функція (машинний час зубошліфування, що визначається формулою (1.91)), повертаються у вихідну точку або роблять новий випадковий крок. Причому тут можна використовувати інформацію (пам'ять) про структуру завдання, накопичену (зафіксовану під час пошуку) в результаті попереднього пошуку. Такий випадковий пошук міститиме вже елементи самонавчання, тобто адаптації. Зазначимо тут, що у всіх випадках використання випадкового пошуку необхідно мати джерело випадкових величин ("білий шум"), званий часто датчиком випадкових чисел.

Повторне розв'язання задачі оптимізації методом випадкового пошуку дозволило отримати, по-перше, ті ж результати, що наведені в табл. 1.1 і, по-друге, виконати оптимізацію для більшого, ніж n 2 проходів зубошліфування. При цьому було помічено, що метод випадкового пошуку на відміну від попереднього класичного методу пошуку екстремуму менш чутливий до обчислювальних пасток різного роду (розподіл на нуль, вилучення кореня з негативного числа тощо) і, крім того, він простіше в реалізації (менше обсяг програми, більше супровідної інформації тощо). На закінчення цього підрозділу зазначимо, що майстерність програміста полягає у підборі найбільш ефективного (для цього класу завдання) методу випадкового пошуку.

АВТОМАТИЧНЕ РЕГУЛЮВАННЯ ПРОЦЕСУ З ПОШУКОМ ОПТИМУМУ

Звичайні системи автоматичного регулювання (САР) що неспроможні виконувати завдання оптимізації технологічних процесів. Це викликано тим, що у звичайних САР завжди відомий напрямок зміни регулюючого впливу, необхідного для усунення неузгодженості між заданим і поточним значеннями регульованої величини. У системах екстремального регулювання (СЕР), на відміну звичайних САР, задане значення регульованої величини невідомо. Тому завдання СЕР принципово складніше і полягає в автоматичному пошуку такого значення регулюючої дії, що забезпечує максимум (або мінімум) регульованої величини. При цьому не відомо, в якому напрямку слід змінювати регулюючий вплив. Крім того, процес пошуку екстремуму не закінчується при досягненні екстремуму, оскільки величина і положення екстремального значення регульованої величини може змінюватися через вплив неконтрольованих впливів, що обурюють. Таким чином, основним процесом в СЕР є автоматичний безперервний пошук екстремуму, що полягає у зміні вхідного впливу на об'єкт, аналізі результатів цього впливу та визначенні подальшого напряму зміни вхідного впливу з метою досягнення екстремуму регульованої величини. Дуже часто цільовою функцією екстремального регулювання процесів є відношення двох параметрів. Наприклад, при роботі двигуна автомобіля це відношення витрати палива за фіксований проміжок часу до відстані, пройденого автомобілем за цей час (це відношення нормують шляхом визначення витрати на 100 км. шляху). Наприклад, для легкового автомобіля "Жигулі" питома витрата палива змінюється в інтервалі від 6 до 16 л/100 км. Залежність такої питомої витрати від швидкості руху автомобіля має екстремум (мінімум), проте конкретний вид статичної екстремальної характеристики залежить від великої кількості факторів (величини крутного моменту на колесах, ваги вантажу, що перевозиться, стану дорожнього покриття тощо). Отже, пошук екстремуму може бути здійснений лише за допомогою вбудованої бортової системи екстремального регулювання.

Як інший приклад розглянемо систему екстремального регулювання питомої продуктивності q шліфувального кола (відношення об'єму Qм зішліфованого металу за фіксований проміжок часу до відповідного об'ємного зносу Qшк шліфувального кола за той же проміжок часу). Цільова функція має вигляд

$$q = \frac{Q_м}{Q_{шк}}. \qquad (1.141)$$

Для заданої твердості та лінійної швидкості шліфувального кола наявність екстремуму обумовлено переходом від одного виду зносу кола до іншого. При невеликих навантаженнях на зерна кола працює в режимі з переважним притупленням. При поступовому збільшенні навантаження на зерна шліфувального кола за інших рівних умов зростає інтенсивність знімання металу і спостерігається зростання питомої продуктивності шліфувального кола. При навантаженнях на зерна шліфувального кола, близьких до критичних, коло переходить з режиму з переважним притупленням до режиму з частковим самозаточуванням. Коло у своїй зношується інтенсивніше. Внаслідок швидшого оновлення різальних зерен кола створюються найбільш сприятливі умови для зростання його питомої продуктивності.

Поліпшення різальних властивостей шліфувального кола рахунок ефекту самозаточування веде до зростання відносного збільшення обсягу сошлифованного металу Qм , отже, і питомої продуктивності кола q . Однак при подальшому збільшенні нормальної сили Fy і, відповідно, навантажень на зерна шліфувального кола відбувається все більше і більше обсипання зерен кола. Відносне збільшення об'ємного зносу кола Qшк зростає, а питома продуктивність кола q знижується. Саме цим пояснюється наявність екстремуму у функціональній залежності q=f(Fy) для шліфувальних кіл заданої твердості при заданій лінійній швидкості Vкр .

Кола однієї і тієї ж марки і навіть виготовлені в одній і тій же технологічній партії не мають абсолютно однакових характеристик. Через це екстремум статичної функціональної залежності q=f(Fy) для різних кіл однієї і тієї ж марки при тих самих значеннях Vкр має місце при різних величинах сили Fy .

Встановлено, що за інших рівних умов внаслідок зміни у той чи інший бік лінійної швидкості шліфувального кола можна збільшити еквівалентну (здається) твердість кола, а отже, збільшити до деякого максимально можливого значення питому продуктивність кола. Очевидно, що ефективність процесу шліфування можна підвищити, якщо питому продуктивність шліфувального круга q автоматично підтримувати на максимально можливому рівні незалежно від варіацій твердості шліфувальних кругів. Впливати на процес шліфування для пошуку і підтримки екстремального значення функції q=f(Fy) принципово можна шляхом зміни швидкості врізання, або зміною швидкості поперечної подачі кола, або зміною швидкості столу, або, нарешті, зміною лінійної швидкості шліфувального кола.

Література

1. Пелешко І. Д., Юрченко В. В. Оптимальне проектування металевих конструкцій на сучасному етапі (огляд праць) //Металеві конструкції. – 2009. – Т. 15. – №. 1. – С. 13.
2. Müller P. Simulation based optimal design //Handbook of Statistics. – 2005. – Т. 25. – С. 509-518.
3. Arora J. S. Introduction to optimum design. – Elsevier, 2004.
4. Засельський І. В. Розрахунки металургійних механізмів та агрегатів ТІ1334ВСМMU ТІ1333ССMMU: 2022/2023, 1, 2 семестр. – 2022.
5. Таратута К. В., Шанько О. Ю. Вибір та обґрунтування показників теоретичної надійності металургійного обладнання //Металургія. – 2015. – №. 2. – С. 109-113.
6. Амосов В. В., Сало В. М., Свірень М. О. Математичне моделювання процесів і машин. – 2022.
7. Бакунов О. О. Проєкт автоматизації безперервного стану холодної прокатки 1680 в умовах металургійного виробництва. Система автоматичного регулювання товщини смуги. – 2023.
8. Papalambros P. Y., Wilde D. J. Principles of optimal design: modeling and computation. – Cambridge university press, 2000.
9. Бредихін І. О., Грищенко В. М. Алгоритми оптимального проектування конструкцій сучасними програмними засобами : дис. – Національний технічний університет" Харківський політехнічний інститут", 2016.
10. Hardin R. H., Sloane N. J. A. A new approach to the construction of optimal designs //Journal of statistical planning and inference. – 1993. – Т. 37. – №. 3. – С. 339-369.